数理解析研究所講究録
973 巻 1996 年 131-146

A Degree Theory for Subdifferential Operators*

早大理工 小林 純 (Jun Kobayashi)

Contents

1 Introduction and Browder's Results

Browder [2, 3, 4] は, 回帰的 Banach 空間 X からその双対空間 X^* への, ある種の単調性をもついくつかの写像のクラスに写像度を定義した. その中の 1 つに極大単調作用素に対する写像度がある. 彼は, $A+f$ (A は極大単調作用素, f は有界な 1 価の擬単調作用素) というクラスに写像度を定義したが, それとまったく同様の方法で, $A+k$ (k はコンパクトな写像) というクラスにも写像度が定義できる.

THEOREM **1.1** X を実回帰的 Banach 空間で, X と X^* が locally uniformly convex (一様凸なら十分, Aspland [1] を見よ) となるもの, G を X の有界開集合とせよ. A を X から X^* への極大単調作用素で $0 \in A0$ を満たすもの, $k : \overline{G} \to X^*$ をコンパクトな写像とする. $p^* \in X^* \setminus \overline{(A+k)(\partial G)}$ のとき, 整数 $\deg(A+k, G, p^*)$ が定義され, 次を満たす.

1. (Normalization) $F : X \to X^*$ を duality map とする. $p^* \in F(G)$ ならば, $\deg(F, G, p^*) = 1$.

*この論文は早大理工·大谷光春教授との共同研究によるものである.

2. (Existence of solution) $\deg(A+k, G, p^*) \neq 0$ ならば, $p^* \in \overline{(A+k)(G)}$.

3. (Domain decomposition and excision) G_1, $G_2 \subset G$ を互いに素な開集合とする. $p^* \notin \overline{(A+k)(\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2))}$ のとき, $\deg(A+k, G, p^*) = \deg(A+k, G_1, p^*) + \deg(A+k, G_2, p^*)$.

4. (Invariance under homotopy) $\{A^t : t \in [0,1]\}$ を pseudo-monotone homotopy of maximal monotone oparators, $\{k_t : t \in [0,1]\}$ を $\overline{G}$ 上のコンパクトホモトピー, $\{p_t^* : t \in [0,1]\}$ を X^* における連続な曲線とせよ. $r > 0$ が存在して, 任意の $t \in [0,1]$ に対し, $B(p_t^*, r) \cap (A^t + k_t)(\partial G) = \emptyset$ が成立すると仮定する. このとき $\deg(A^t + k_t, G, p_t^*)$ は t に依らず一定である.

(pseudo-monotone homotopy の定義は後で述べる)

この理論には次のような欠点が見られる.

(a) 写像度を定義するための条件が, $p^* \notin \overline{(A+k)(\partial G)}$ のように閉包を必要とする. 従って, 領域の分解定理やホモトピー不変性の定理も使いにくいものとなっている.

(b) $\deg(A+k, G, p^*) \neq 0$ から, 方程式 $Ax + kx \ni p^*$ $(x \in G)$ の解の存在が直接は得られない.

(c) 写像度を normalize する duality map F と極大単調作用素 A との間の凸結合の族 $\{(1-t)F + tA\}$ が, 写像度を不変とするホモトピーのクラス (pseudo-monotone homotopy) に入るかどうか一般にはわからない.

(Browder の $A + f$ (f は擬単調作用素) というクラスに対する写像度も, ほぼ同様の欠点をもつ)
これらの点を改善するため, A が実 Hilbert 空間における劣微分作用素となっている場合について考察する.

以後 X から X^* への多価写像を, $X \times X^*$ の部分集合であるそのグラフと同一視する.

$A \subset X \times X^*$ を極大単調作用素とせよ. このとき任意の $x \in X$ と $\lambda > 0$ に対し,

$$F(x_\lambda - x) + \lambda A x_\lambda \ni 0$$

は一意解 $x_\lambda \in D(A)$ をもつ.

$$J_\lambda^A x = x_\lambda,$$

$$A_\lambda x = -\frac{1}{\lambda}F(x_\lambda - x)$$

により, A のレゾルベント J_λ^A と (一般化された) 吉田近似 A_λ が定義される (Barbu [9] 2 章を見よ).

では pseudo-monotone homotopy の定義を述べよう.

Definition **1.2** $\{A^t : t \in [0,1]\}$ を X から X^* への極大単調作用素の族で, 任意の $t \in [0,1]$ に対し, $[0,0] \in A^t$ なるものとせよ. $\{A^t\}$ は, 次の互いに同値な各条件を満たすとき, **pseudo-monotone homotopy of maximal monotone operators** であるという.

1. (Generalized pseudo-monotonicity) $[0,1]$ で t に収束する列 $\{t_n\}$ に対し, 次のような列 $\{x_n\}, \{x_n^*\}$ が存在するとせよ.

   $$[x_n, x_n^*] \in A^{t_n} \quad {}^\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \rightharpoonup x, \qquad x_n^* \rightharpoonup x^*.$$

   さらに,

   $$\limsup_{n\to\infty} \langle x_n^*, x_n \rangle \le \langle x^*, x \rangle$$

   であるならば, 次が成立する.

   $$[x, x^*] \in A^t, \quad \lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, x_n \rangle = \langle x^*, x \rangle.$$

2. ある $\lambda > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対し, $[0,1]$ から X への写像

   $$t \mapsto J_\lambda^{A^t} x$$

   が (X の強位相で) 連続.

3. (Strong lower semicontinuity) $\{t_n\}$ を $[0,1]$ の列で t に収束するものとする. $[x, x^*] \in A^t$ とせよ. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $[x_n, x_n^*] \in A^{t_n}$ が存在し, 次を満たす.

   $$x_n \to x, \quad x_n^* \to x^*.$$

2 Degree for Subdifferential Operators

以後 H を可分な実 Hilbert 空間, G を H の有界な開集合とする. H の内積, ノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)_H$, $|\cdot|_H$, 又は簡単に $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ で表す.

Definition **2.1** 次の条件 (i)-(iii) を満たす H から $[0,+\infty]$ への下半連続凸関数 φ 全体の集合を $\Phi(H)$ で表す.

(i) $\varphi(0)=0$.

(ii) $D(\varphi)=\{u\in H:\varphi(u)<+\infty\}$ が H で稠密.

(iii) 任意の $L\in]0,+\infty[$ に対して, 集合 $\{u\in H:\varphi(u)+|u|_H^2\le L\}$ が H でコンパクト.

(i) より φ の劣微分 $\partial\varphi$ は, $[0,0]\in\partial\varphi$ を満たす極大単調作用素となる. k をコンパクトな写像とすれば, $\partial\varphi+k$ の写像度を考えることができる. (iii) より $\partial\varphi+k$ は, 有界閉集合を閉集合に写す写像となり, 1 章で述べた欠点 (a), (b) が解決する (Theorem 2.4 を見よ). (c) のホモトピーについては, (i), (ii) より次のような結果を得る.

Proposition **2.2** φ, $\psi\in\Phi(H)$ とせよ.

1. $\{(1-t)\mathrm{Id}+t\partial\varphi : t\in[0,1]\}$ (Id は H 上の恒等写像) は pseudo-monotone homotopy である.

2. φ と ψ がさらに次のような角度条件

$$(\partial\varphi_\lambda(u),\partial\psi_\mu(u))\ge 0 \qquad {}^\forall u\in H,\ {}^\forall\lambda>0,\ {}^\forall\mu>0 \tag{1}$$

を満たすならば, $\{(1-t)\partial\varphi+t\partial\psi : t\in[0,1]\}$ は pseudo-monotone homotopy である.

proof. 以下の証明には, コンパクト性の条件 (iii) は不要である. 従って 2. だけを示せば十分.

まず, 任意の $t\in]0,1[$ に対し, $(1-t)\partial\varphi+t\partial\psi$ が極大単調となることを示す.

Brézis [5, Theorem 4.4] より, (1) は

$$(v,\partial\psi_\lambda(u))\ge 0 \qquad {}^\forall[u,v]\in\partial\varphi,\ {}^\forall\lambda>0 \tag{2}$$

と同値であることに注意.

$t \in]0,1[$, $x \in H$ とせよ. 任意の $\lambda > 0$ に対して, $(1-t)\partial\varphi + t\partial\psi_\lambda$ は極大単調であるから,

$$u_\lambda + (1-t)v_\lambda + t\partial\psi_\lambda(u_\lambda) = x, \qquad [u_\lambda, v_\lambda] \in \partial\varphi \tag{3}$$

は一意解 $[u_\lambda, v_\lambda]$ をもつ. DEFINITION 2.1 の条件 (i) から $(u, \partial\varphi(u)) \geq 0$, $(u, \partial\psi_\lambda(u)) \geq 0$ が従うことに注意して, (3) と u_λ, v_λ との内積をとれば, $|u_\lambda|$, $|v_\lambda|$, $|\partial\psi_\lambda(u)|$ がすべて有界となることがわかる. (3) で $\lambda = \lambda$ としたものと $\lambda = \mu$ としたものとの差をとることにより,

$$\begin{aligned} 0 = &(u_\lambda + (1-t)v_\lambda - u_\mu - (1-t)v_\mu, u_\lambda - u_\mu) \\ &+t(\partial\psi_\lambda(u_\lambda) - \partial\psi_\mu(u_\mu), u_\lambda - u_\mu) \end{aligned}$$

を得る. ここで $\partial\varphi$, $\partial\psi$ の単調性, 及び, $\partial\psi_\lambda(u) \in \partial\psi(J_\lambda^{\partial\psi}u)$ なる関係と, Kōmura の trick を用いれば,

$$|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq t(\lambda + \mu)(|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)|^2 + |\partial\psi_\mu(u_\mu)|^2)$$

が成立し, $\{u_\lambda\}$ は Caushy 列をなすことがわかる. よって, 極大単調作用素の demiclosed 性, 及び, $|u_\lambda - J_\lambda^{\partial\psi}u_\lambda| = \lambda|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)| \to 0$ $(\lambda \to 0)$ に注意すれば, $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる列が存在して,

$$u_{\lambda_n} \to u, \quad v_{\lambda_n} \rightharpoonup v \in \partial\varphi(u), \quad \partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \rightharpoonup w \in \partial\psi(u)$$

とできる. よって u は,

$$u + (1-t)v + tw = x, \quad v \in \partial\varphi(u), \quad w \in \partial\psi(u)$$

を満たす. 即ち $(1-t)\partial\varphi + t\partial\psi$ は極大単調.

次に DEFINITION 1.2 の 2. を示す. $A^t = (1-t)\partial\varphi + \partial\psi$ とおく. $x \in H$, $t_n \to t$ とせよ. $u_n = J_1^{A_{t_n}}x$ とする. 即ち,

$$u_n + z_n = x, \qquad [u_n, z_n] \in A^{t_n}.$$

対称性より $t \neq 0$ としてよい. また, $t_n \neq 0, 1$ としても一般性を失わない. さて, 上の議論から,

$$u_{\lambda_n} + (1-t_n)v_{\lambda_n} + t_n\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = x, \qquad [u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}] \in \partial\varphi, \tag{4}$$

かつ, $|u_n - u_{\lambda_n}| < 1/n$ となるような列 $\{\lambda_n\}(\lambda_n \to 0)$, $\{u_{\lambda_n}\}$, $\{v_{\lambda_n}\}$ が存在する. $t \neq 1$ のときは, 上の議論と同様に,

$$u_{\lambda_n} \to u, \quad v_{\lambda_n} \rightharpoonup v \in \partial\varphi(u), \quad \partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \rightharpoonup w \in \partial\psi(u)$$

を得る. (4) で $n \to \infty$ とすれば,

$$u + (1-t)v + tw = x,$$

即ち $u = J_1^{A^t}x$. さらに,

$$|u_n - u| \leq |u_n - u_{\lambda_n}| + |u_{\lambda_n} - u| \to 0.$$

よって $J_1^{A^{t_n}}x \to J_1^{A^t}x$ が示された. $t = 1$ のときには, (2), (4) より $|u_{\lambda_n}|$, $|\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})|$ は有界. よって, $\{n\}$ の部分列 (又 $\{n\}$ とかく) が存在して, $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$, $\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \rightharpoonup w$. さて, 任意の $y \in D(\varphi)$ に対して,

$$\begin{aligned}
(1-t_n)\varphi(y) &\geq (1-t_n)\{\varphi(y) - \varphi(u_{\lambda_n})\} \\
&\geq (1-t_n)(v_{\lambda_n}, y - u_{\lambda_n}) \\
&= (x, y - u_{\lambda_n}) - t_n(\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), y) + t_n(\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), u_{\lambda_n}) \\
&\qquad -(u_{\lambda_n}, y) + |u_{\lambda_n}|^2.
\end{aligned}$$

両辺下極限をとると, $\partial\psi$ が極大単調であることから,

$$\begin{aligned}
0 &\geq (x, y-u) - (w, y) + (w, u) - (u, y) + |u|^2 \\
&= (x - w - u, y - u).
\end{aligned}$$

$\overline{D(\varphi)} = H$ より, これは任意の $y \in H$ で成立. 従って,

$$u + w = x$$

を得る. あとは, $[u, w] \in \partial\psi$, $u_{\lambda_n} \to u$ を示せばよい. $(v_{\lambda_n}, u_{\lambda_n}) \geq 0$ だから,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), u_{\lambda_n}) &= \limsup_{n\to\infty}(t_n\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), u_{\lambda_n}) \\
&= \limsup_{n\to\infty}(x - u_{\lambda_n} - (1-t_n)v_{\lambda_n}, u_{\lambda_n}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty}(x, u_{\lambda_n}) - \liminf_{n\to\infty}|u_{\lambda_n}|^2 \\
&\leq (x, u) - |u|^2 \\
&= (w, u)
\end{aligned}$$

Barbu [9, LEMMA 2.1.3] より $[u,w]\in\partial\psi$, かつ,

$$\lim_{n\to\infty}(\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}),u_{\lambda_n})=(w,u).$$

を得る. 従って, 再び $(v_{\lambda_n},u_{\lambda_n})\geq 0$ により,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}|u_{\lambda_n}|^2 &= \limsup_{n\to\infty}(x-(1-t_n)v_{\lambda_n}-t_n\partial\psi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}),u_{\lambda_n})\\ &\leq (x,u)-(w,u)\\ &= |u|^2.\end{aligned}$$

よって $u_{\lambda_n}\to u$. □

ホモトピーのクラスも定義しておく.

DEFINITION **2.3** 次の条件 (i)-(iv) を満たす H から $[0,+\infty]$ への下半連続凸関数の族 $\{\varphi^t : t\in[0,1]\}$ 全体の集合を $\Phi^t(H)$ で表す.

(i) 任意の $t\in[0,1]$ に対し, $\varphi^t(0)=0$.

(ii) 任意の $t\in[0,1]$ に対し, $D(\varphi^t)$ が H で稠密.

(iii) 任意の $L\in\,]0,+\infty[$ に対して,

$$\{[u,t]\in H\times[0,1] : \varphi^t(u)+|u|_H^2\leq L\}$$

が相対コンパクト.

(iv) $\{\partial\varphi^t : t\in[0,1]\}$ が pseudo-monotone homotopy.

REMARK φ, $\psi\in\Phi(H)$ が (1) を満たすとせよ. このとき, $\{(1-t)\varphi+t\psi\}\in\Phi^t(H)$ となる.

$\Phi(H)$ の元の劣微分の場合, THEOREM 1.1 は次のようになる.

THEOREM **2.4** $\varphi\in\Phi(H)$ とせよ. k を $\overline{G}$ から H へのコンパクトな写像とする. $p\in H\setminus(\partial\varphi+k)(\partial G)$ のとき, 整数 $\deg(\partial\varphi+k,G,p)$ が定義され, 次を満たす.

1. さらに, $\partial\varphi$ が狭義単調であるとせよ. $p\in\partial\varphi(G)$ ならば, $\deg(\partial\varphi,G,p)=1$.

2. $\deg(\partial\varphi + k, G, p) \neq 0$ ならば, 方程式 $\partial\varphi(u) + ku \ni p$ は G に解をもつ.

3. G_1, G_2 を互いに素な G に含まれる開集合とする. $u \notin (\partial\varphi + k)(\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$ のとき, $\deg(\partial\varphi + k, G, p) = \deg(\partial\varphi + k, G_1, p) + \deg(\partial\varphi + k, G_2, p)$.

4. $\{\varphi^t : t \in [0,1]\} \in \Phi^t(H)$ とせよ. $\{k_t : t \in [0,1]\}$ を $\overline{G}$ 上のコンパクトホモトピー, $\{p_t : t \in [0,1]\}$ を H における連続な曲線とする. 任意の $t \in [0,1]$ に対し, $p_t \notin (\partial\varphi^t + k_t)(\partial G)$ が成立するとき, $\deg(\partial\varphi^t + k_t, G, p_t)$ は t に依らず一定である.

proof. $\varphi \in \Phi(H)$ のとき, $\partial\varphi + k$ は有界閉集合を閉集合に写す写像となる. 従って, $(\partial\varphi + k)(\partial G)$ は閉集合となり, Theorem 1.1 より $p \notin (\partial\varphi + k)(\partial G)$ のとき $\deg(\partial\varphi + k, G, p)$ が定義される.

同じ理由で 3. と 4. が成立.

2. も Theorem 1.1 とレベルセットのコンパクト性より容易に示される.

1. を示そう. 仮定より $u_0 \in G$ が存在して $p \in \partial\varphi(u_0)$. $\partial\varphi$ は狭義単調なので, $p \in \partial\varphi(u)$ の解はこの u_0 以外にはない. 従って,

$$B = B(0, |u_0|_H + 1) = \{u \in H : |u|_H < |u_0|_H + 1\}$$

とおけば, すでに示した 3. より,

$$\begin{aligned} \deg(\partial\varphi, G, p) &= \deg(\partial\varphi, G \cup B, p) \\ &= \deg(\partial\varphi, B, p). \end{aligned} \tag{5}$$

$A^t = (1-t)\mathrm{Id} + t\partial\varphi$, $p_t = tp$ として Theorem 1.1 の 4. を適用する. ある $r > 0$ が存在して, 任意の t に対して,

$$B(p_t, r) \cap A^t(\partial G) = \emptyset$$

となることが示される. よって,

$$\begin{aligned} \deg(\partial\varphi, B, p) &= \deg(\mathrm{Id}, B, 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

これと (5) より結論を得る. □

3 Perturbation Problems

2 章において Hilbert 空間上で $\partial\varphi + k$ という形の写像のクラス ($\varphi \in \Phi(H)$, k はコンパクトな写像) に限定して考えることにより, Browder の極大単調作用素に対する写像度の欠点を改善した. しかし φ のレベルセットのコンパクト性をすでに仮定しているため, 実際の偏微分方程式への応用を考えた場合, $\partial\varphi$ の摂動のクラスを, より弱いクラスへ拡張する必要がある. この様な視点から, この章では摂動の一般化を考える.

3.1 Multivalued compact perturbations

まず, 摂動のクラスをコンパクトな多価写像に拡張することから始める. 基本的な考え方は, Leray-Schauder の写像度を多価写像に対するものに拡張する方法の一つと同様である. 定義と結果だけ述べる. 詳しくは Lloyd [8, 7 章] を見よ.

Definition **3.1** S_1, S_2 を 位相空間, $T \subset S_1 \times S_2$ とする. 任意の $x \in D(T)$ と Tx の近傍 V に対し, x の近傍 U が存在して, $T(U) \subset V$ となるとき, T は **upper semicontinuous** であるという.

Definition **3.2** S_1, S_2 を 距離空間とする. S_1 から S_2への多価写像 K が**コンパクト**であるとは, K が upper semicontinuous で, かつ, 任意の S_1 の有界集合を S_2 の相対コンパクトな集合に写すことをいう.

以後, 2 章と同様に H を可分な実 Hilbert 空間, G を H の有界な開集合とする.

Definition **3.3** $\{K_t : t \in [0,1]\}$ を $\overline{G}$ から H への多価写像の族とする. $\{K_t\}$ は次の条件を満たすとき $\overline{G}$ 上の**コンパクトホモトピー**であるという.

(i) 任意の $t \in [0,1]$, $u \in \overline{G}$ に対し $K_t u$ は空でない閉凸集合である.

(ii) $K.(\cdot)$ は $\overline{G} \times [0,1]$ から H への多価写像としてコンパクトである.

Theorem **3.4** K を $\overline{G}$ から H へのコンパクトな多価写像で, 任意の $u \in \overline{G}$ に対し, Ku は空でない閉凸集合となるものとする. Theorem 2.4 は, 一価のコンパクトな写像 k を K に, 一価のコンパクトホモトピー $\{k_t\}$ を多価のコンパクトホモトピー $\{K_t\}$ に, それぞれ置き換えても成立する.

3.2 Bounded-demiclosed perturbations

次に, 摂動のクラスを, $\overline{G}$ 全体で定義された有界で demiclosed な多価写像のクラスへ拡張する. このクラスで考えるホモトピーの定義を述べる.

DEFINITION **3.5** 次の条件 (i), (ii) を満たす $\overline{G}$ から H への多価写像の族 $\{B^t : t \in [0,1]\}$ 全体の集合を $\mathcal{BD}^t(\overline{G})$ で表す.

(i) 任意の $t \in [0,1]$, $u \in \overline{G}$ に対し, $B^t u$ は空でない凸閉集合である.

(ii) $B^{\cdot}(\cdot)$ は $\overline{G} \times [0,1]$ から H への多価写像として, 有界かつ demiclosed である.

さて, H の可分性より, 次のような有限次元部分空間の列 $\{H_i\}$ が存在する.

$$\begin{cases} H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_i \subset \cdots \\ \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i} = H \end{cases}$$

P_i を H から H_i への射影とする.

$\{B^t : t \in [0,1]\} \in \mathcal{BD}^t(\overline{G})$ とせよ. $i \in \mathbb{N}$ に対し, B^t と P_i の合成

$$\begin{aligned} B_i^t &\equiv P_i \circ B^t \\ &= \{[u, P_i v] : [u, v] \in B^t\} \end{aligned}$$

を考えると, $\{B_i^t : t \in [0,1]\}$ は $\overline{G}$ 上のコンパクトホモトピーとなる.

LEMMA **3.6** $\{\varphi^t : t \in [0,1]\} \in \Phi^t(H)$, $\{B^t : t \in [0,1]\} \in \mathcal{BD}^t(\overline{G})$ とせよ. $\{p_t : t \in [0,1]\}$ を H における連続な曲線とする. 任意の $t \in [0,1]$ に対し,

$$p_t \notin (\partial\varphi^t + B^t)(\partial G) \tag{6}$$

と仮定する. このとき, ある $i \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $j \geq i$, $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$ に対し,

$$p_t \notin (\partial\varphi^t + (1-s)B_i^t + sB_j^t)(\partial G).$$

proof. 結論が成立しないとすると, 次のような列を得る.

$$\begin{aligned} &i_n,\ j_n \in \mathbb{N}, \quad j_n \geq i_n \to \infty, \\ &t_n \in [0,1], \qquad s_n \in [0,1], \\ &u_n \in \partial G, \quad v_n \in \partial\varphi^{t_n}(u_n), \quad b_n^0,\ b_n^1 \in B^{t_n} u_n, \end{aligned}$$

かつ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$p_{t_n} = v_n + (1 - s_n)P_{i_n}b_n^0 + s_n P_{j_n} b_n^1. \tag{7}$$

$|u_n|, |b_n^0|, |b_n^1|$ の有界性より $|v_n|$ も有界. よって $\{n\}$ の部分列 (それを又 $\{n\}$ とかく) が存在して

$$\begin{aligned} t_n &\to t, & s_n &\to s, \\ u_n &\rightharpoonup u, & v_n &\rightharpoonup v, \\ b_n^0 &\rightharpoonup b^0, & b_n^1 &\rightharpoonup b^1 \end{aligned}$$

とできる. 一方,

$$\varphi^{t_n}(u_n) + |u_n|^2 \leq (v_n, u_n) + |u_n|^2$$

も有界. コンパクト性の条件より $u_n \to u$ となるから, (7) で $n \to \infty$ とすれば,

$$p_t = v + (1 - s)b^0 + sb^1.$$

ここで, $\{\partial\varphi^t\}$ は pseudo-monotone homotopy だから, $[u, v] \in \partial\varphi^t$ を得る. DEFINITION 3.5 より $(1 - s)b^0 + sb^1 \in B^t u$. これらは (6) に矛盾. □

$\varphi \in \Phi(H)$ とし, B を $\overline{G}$ から H への有界かつ demiclosed な多価写像で, 任意の $u \in \overline{G}$ に対し, Bu は空でない閉凸集合となるものとする. $p \notin (\partial\varphi + B)(\partial G)$ のとき $\deg(\partial\varphi + B, G, p)$ を次のように定義する. LEMMA 3.6 と THEOREM 3.4 より, ある $i_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $i \geq i_0$ に対し, $\deg(\partial\varphi + B_i, G, p)$ が定義され, しかも i に依らない. LEMMA 3.6 の証明と同様の議論により, 有限次元部分空間の列 $\{H_i\}$ の選び方にも依らないことがわかる. そこで

$$\deg(\partial\varphi + B, G, p) \equiv \lim_{i\to\infty} \deg(\partial\varphi + B_i, G, p)$$

と定義する. この定義と LEMMA 3.6 (及びその証明と同様の議論) により, 次の定理を得る.

THEOREM **3.7** THEOREM 3.4 は, コンパクトな多価写像を有界かつ demiclosed な多価写像に, コンパクトホモトピーを $\mathcal{BD}^t(\overline{G})$ の元に, それぞれ置き換えても成立する.

3.3 φ-bounded-demiclosed perturbations

この節では, 摂動のクラスを, φ に付随したある種の有界性と demiclosed 性をもつ多価写像のクラスにまで拡張する.

$[0,+\infty[$ 上の単調増加関数全体の集合を $\mathcal{M}$ とおく.

DEFINITION **3.8** $\varphi \in \Phi(H)$ に対し, 次の条件 (i)-(iv) を満たす H から H への多価写像 B 全体の集合を $\mathcal{BD}_\varphi(H)$ で表す.

(i) 任意の $u \in D(\partial\varphi)$ に対し, Bu は空でない閉凸集合.

(ii) B は次の意味で demiclosed: $[u_n, v_n] \in \partial\varphi$, $b_n \in B(u_n)$ で, かつ, $u_n \to u$, $v_n \rightharpoonup v$, $b_n \rightharpoonup b$ とすると, $b \in Bu$.

(iii) $k_0 \in]0,1[$, $\alpha \in]0,2[$, $\ell_0 \in \mathcal{M}$ が存在し,

$$|b|_H^2 \le k_0|v|_H^2 + \ell_0(|u|_H)(\varphi(u)^\alpha + 1) \quad {}^\forall[u,v] \in \partial\varphi,\ {}^\forall b \in Bu.$$

(iv) $k_1 \in]0,1[$, $\ell_1 \in \mathcal{M}$ が存在し,

$$-(b,u)_H \le k_1\varphi(u) + \ell_1(|u|_H) \quad {}^\forall u \in D(\partial\varphi),\ {}^\forall b \in Bu.$$

ホモトピーのクラスも同様に定義する.

DEFINITION **3.9** $\{\varphi^t : t \in [0,1]\} \in \Phi^t(H)$ に対し, 次の条件 (i)-(iv) を満たす H から H への多価写像の族 $\{B^t : t \in [0,1]\}$ 全体の集合を $\mathcal{BD}^t_{\varphi^t}(H)$ で表す.

(i) 任意の $t \in [0,1]$, $u \in D(\partial\varphi)$ に対し, $B^t u$ は空でない閉凸集合.

(ii) $t_n \in [0,1]$, $[u_n, v_n] \in \partial\varphi^{t_n}$, $b_n \in B^{t_n}u_n$ で, かつ, $t_n \to t$, $u_n \to u$, $v_n \rightharpoonup v$, $b_n \rightharpoonup b$ ならば $b \in B^t u$.

(iii) $k_0 \in]0,1[$, $\alpha \in]0,2[$, $\ell_0 \in \mathcal{M}$ が存在し,

$$|b|_H^2 \le k_0|v|_H^2 + \ell_0(|u|_H)(\varphi^t(u)^\alpha + 1)$$
$${}^\forall t \in [0,1],\ {}^\forall[u,v] \in \partial\varphi^t,\ {}^\forall b \in B^t u.$$

(iv) $k_1 \in]0,1[$, $\ell_1 \in \mathcal{M}$ が存在し,

$$-(b,u)_H \le k_1\varphi^t(u) + \ell_1(|u|_H)$$
$${}^\forall t \in [0,1],\ {}^\forall u \in D(\partial\varphi^t),\ {}^\forall b \in B^t u.$$

$\{\varphi^t\} \in \Phi^t(H)$, $\{B^t\} \in \mathcal{BD}^t_{\varphi^t}(H)$ とせよ. $\lambda > 0$ に対し, $\partial\varphi^t$ のレゾルベント $J_\lambda^{\partial\varphi^t}$ と B^t の合成

$$\begin{aligned} B_\lambda^t &\equiv B^t \circ J_\lambda^{\partial\varphi^t} \\ &= \{[u,v] : v \in B(J_\lambda^{\partial\varphi^t})\} \end{aligned}$$

を考える. 任意の有界開集合 $G \subset H$ に対して, $\{B_\lambda^t : t \in [0,1]\} \in \mathcal{BD}^t(\overline{G})$ となる.

Lemma **3.10** $\{\varphi^t : t \in [0,1]\} \in \Phi^t(H)$, $\{B^t : t \in [0,1]\} \in \mathcal{BD}^t_{\varphi^t}(H)$ とせよ. $\{p_t : t \in [0,1]\}$ を H における連続な曲線とする. 任意の $t \in [0,1]$ に対し,

$$p_t \notin (\partial\varphi^t + B^t)(\partial G) \tag{8}$$

と仮定する. このとき, ある $\lambda > 0$ が存在して, 任意の $\mu \in]0,\lambda]$, $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$ に対し,

$$p_t \notin (\partial\varphi^t + (1-s)B_\lambda^t + sB_\mu^t)(\partial G).$$

proof. $J_\lambda^{\partial\varphi^t}$ を簡単に J_λ^t と表す.

さて, 結論が成立しないとすると, 次のような列を得る.

$$\begin{aligned} &0 < \mu_n \le \lambda_n \to 0, \\ &t_n \in [0,1], \qquad s_n \in [0,1], \\ &u_n \in \partial G, \qquad v_n \in \partial\varphi^{t_n}(u_n), \qquad b_n^0,\ b_n^1 \in B^{t_n}(J_{\lambda_n}^{t_n} u_n), \end{aligned}$$

かつ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$p_{t_n} = v_n + (1-s_n)b_n^0 + s_n b_n^1. \tag{9}$$

まず, $\varphi^{t_n}(u_n)$ が有界となることを示す. 以後, C_i $(i = 1,2,\cdots)$ は n に依らない定数とする. $\varphi^t(0) = 0$ と $|u_n|$, $|p_{t_n}|$ の有界性より,

$$\begin{aligned} \varphi^{t_n}(u_n) &\le (v_n, u_n) \\ &\le C_1 - (1-s_n)(b_n^0, u_n) - s_n(b_n^1, u_n). \end{aligned} \tag{10}$$

ここで Definition 3.9 の (iii), (iv) より,

$$\begin{aligned} -(b_n^0, u_n) &= -(b_n^0, J_{\lambda_n}^{t_n} u_n) - \lambda_n(b_n^0, \partial\varphi_{\lambda_n}^{t_n}(u_n)) \\ &\le k_1\varphi^{t_n}(J_{\lambda_n}^{t_n} u_n) + C_2 + \frac{1}{2}\lambda_n\Big\{k_0|\partial\varphi_{\lambda_n}^{t_n}(u_n)|^2 \\ &\qquad + C_3(\varphi^{t_n}(J_{\lambda_n}^{t_n} u_n)^\alpha + 1)\Big\} + \frac{1}{2}\lambda_n|\partial\varphi_{\lambda_n}^{t_n}(u_n)|^2. \end{aligned}$$

ここで,

$$\varphi^{t_n}(J^{t_n}_{\lambda_n}u_n) \le \varphi^{t_n}(u_n), \qquad \varphi^{t_n}(J^{t_n}_{\lambda_n}u_n) \le \frac{1}{\lambda_n}|u_n|^2,$$

$$|\partial\varphi^{t_n}_{\lambda_n}(u_n)| \le \frac{1}{\lambda_n}|u_n|, \qquad |\partial\varphi^{t_n}_{\lambda_n}(u_n)| \le |v_n|$$

であるから,

$$-(b^0_n, u_n) \le k_1\varphi^{t_n}(u_n) + C_4|v_n| + C_5\varphi^{t_n}(u_n)^{\alpha-1} + C_6. \tag{11}$$

さらに, Young の不等式より,

$$\begin{aligned} |v_n|^2 &= (p_{t_n} - (1-s_n)b^0_n - s_n b^1_n, v_n) \\ &\le \varepsilon|v_n|^2 + C_\varepsilon + \frac{1}{2}(1-s_n)|b^0_n|^2 + \frac{1}{2}s_n|b^1_n|^2 + \frac{1}{2}|v_n|^2, \end{aligned} \tag{12}$$

ここで C_ε は $\varepsilon > 0$ のみに依存する定数である. Definition 3.9 の (iii) を用いると, (12) より,

$$(\frac{1}{2} - \varepsilon)|v_n|^2 \le C_\varepsilon + \frac{1}{2}\{\ k_0|v_n|^2 + C_7(\varphi^{t_n}(u_n)^\alpha + 1)\}.$$

$\frac{1}{2} - \varepsilon > \frac{1}{2}k_0$ となるように ε を選ぶと,

$$|v_n|^2 \le C_8 + C_9\varphi^{t_n}(u_n)^\alpha. \tag{13}$$

これと (11) より,

$$-(b^0_n, u_n) \le k_1\varphi^{t_n}(u_n) + C_{10}\varphi^{t_n}(u_n)^{\alpha/2} + C_5\varphi^{t_n}(u_n)^{\alpha-1} + C_{11}.$$

$-(b^1_n, u_n)$ についてもまったく同様の評価を得て, 従って (10) より,

$$\varphi^{t_n}(u_n) \le k_1\varphi^{t_n}(u_n) + C_{12}\varphi^{t_n}(u_n)^{\alpha/2} + C_{13}\varphi^{t_n}(u_n)^{\alpha-1} + C_{14}.$$

$k_1 < 1$, $\alpha < 2$ より $\varphi^{t_n}(u_n)$ は有界. 従って, $\{u_n\}$ の部分列 (それを又 $\{u_n\}$ とかく) が存在して, $u_n \to u$ ($\in \partial G$). (13) より $|v_n|$ も有界. Definition 3.9 の (iii) より $|b^0_n|$, $|b^1_n|$ も有界. よって, $\{n\}$ の部分列 (又 $\{n\}$ とかく) が存在して,

$$v_n \rightharpoonup v, \quad b^0_n \rightharpoonup b^0, \quad b^1_n \rightharpoonup b^1, \quad t_n \to t, \quad s_n \to s.$$

$\{\partial\varphi^t\}$ は pseudo-monotone homotopy だから, $[u, v] \in \partial\varphi^t$ を得る. また,

$$|J^{t_n}_{\lambda_n}u_n - u_n| = \lambda_n|\partial\varphi^{t_n}_{\lambda_n}(u_n)| \le \lambda_n|v_n| \to 0$$

だから $J_{\lambda_n}^{t_n} u_n \to u$. 従って, DEFINITION 3.9 の (ii) より b^0, $b^1 \in B^t u$. (9) で $n \to \infty$ とすれば,

$$p_t = v + (1-s)b^0 + sb^1$$

これらは (8) に矛盾. □

$\varphi \in \Phi(H)$, $B \in \mathcal{BD}_\varphi(H)$ とする. $p \notin (\partial\varphi + B)(\partial G)$ のとき $\deg(\partial\varphi + B, G, p)$ を次のように定義する. LEMMA 3.10 と THEOREM 3.7 より, $\lambda_0 > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \in]0, \lambda_0]$ に対し, $\deg(\partial\varphi + B_\lambda, G, p)$ が定義され, しかも λ に依らない. そこで,

$$\deg(\partial\varphi + B, G, p) \equiv \lim_{\lambda \to 0} \deg(\partial\varphi + B_\lambda, G, p)$$

と定義する. この定義と LEMMA 3.10 (及びその証明と同様の議論) により, 次の定理を得る.

THEOREM **3.11** $\varphi \in \Phi(H)$, $B \in \mathcal{BD}_\varphi(H)$ とせよ. $p \in H \setminus (\partial\varphi + B)(\partial G)$ のとき, 整数 $\deg(\partial\varphi + B, G, p)$ が定義され, 次を満たす.

1. (Normalization) さらに, $\partial\varphi$ が狭義単調であるとせよ. $p \in \partial\varphi(G)$ ならば, $\deg(\partial\varphi, G, p) = 1$.

2. (Existece of solution) $\deg(\partial\varphi + B, G, p) \neq 0$ ならば, 方程式 $\partial\varphi(u) + Bu \ni p$ は G に解をもつ.

3. (Domain decomposition and excision) G_1, G_2 を互いに素な G に含まれる開集合とする. $u \notin (\partial\varphi + B)(\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$ のとき, $\deg(\partial\varphi + B, G, p) = \deg(\partial\varphi + B, G_1, p) + \deg(\partial\varphi + B, G_2, p)$.

4. (Invariance under homotopy) $\{\varphi^t : t \in [0,1]\} \in \Phi^t(H)$, $\{B^t : t \in [0,1]\} \in \mathcal{BD}^t_{\varphi^t}(H)$ とせよ. $\{p_t : t \in [0,1]\}$ を H における連続な曲線とする. 任意の $t \in [0,1]$ に対し, $p_t \notin (\partial\varphi^t + B^t)(\partial G)$ が成立するとき, $\deg(\partial\varphi^t + B^t, G, p_t)$ は t に依らず一定である.

参考文献

[1] E. ASPLAND, *Averaged norms*, Israel J. Math., **5** (1967), 227-233.

[2] F. E. BROWDER, *Fixed point theory and nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1983), 1-39.

[3] —, *Degree of mappings for nonlinear mappings of monotone type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **80** (1983), 1771-1773.

[4] —, *Degree of mappings for nonlinear mappings of monotone type: Densely defined mappings*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **80** (1983), 2405-2407.

[5] H. BRÉZIS, *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. Studies, vol. 5, North-Holland, Amstardam/ New York, 1973.

[6] M. ÔTANI, *Nonmonotone perturbations for nonlinear evolution equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems*, J. Differential Equations **46** (1982), 268-299.

[7] —, *Nonmonotone perturbations for nonlinear evolution equations associated with subdifferential operators, periodic problems*, J. Differential Equations **54** (1984), 248-273.

[8] N. G. LLOYD, *Degree theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[9] V. BARBU, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.